احسان یارمحمدی، دبیر ریاضی اراک

روش دور زدن دِلتا: رقیبی برای رابطهٔ دِلتا در حل معادلهٔ درجهٔ دوم

اشاره

می‌دانیم که هر معادله به شکل $ax^2+bx+c=0$ را که در آن $b,c\in R$ و $a\in R-\{0\}$ باشد، معادلهٔ درجهٔ دوم می‌نامیم. در سده‌های متوالی برای ارائهٔ راه‌حل یا روش‌های حل این نوع معادله توسط ریاضی‌دانان متعددی پیشنهادها و روش‌هایی بیان شده‌اند که نتیجهٔ آن‌ها در قالب روش تجزیه، روش مربع کامل، روش هندسی و روش رابطهٔ دِلتا (Δ) در اختیار ریاضی‌آموزان و علاقه‌مندان به ریاضیات قرار گرفته است. در این مقاله قصد داریم که با بهره‌گیری از مفهوم حل معادلهٔ درجهٔ دوم به روش دِلتا به ارائهٔ رابطه‌ای جدید و به دنبال آن روشی نوین برای حل معادله‌های درجهٔ دوم بپردازیم. امیدواریم که ریاضی‌آموزان با استفاده از این روش پویایی ذهن خود را محک بزنند و به یاد داشته باشند که استفاده از مقداری خلاقیت می‌تواند به ایجاد یک رابطهٔ نوین در ریاضیات یا خلق روش جدیدی در موضوع‌های ریاضی منجر شود.

می‌دانیم که برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ و $a\in R-\{0\}$ و $b,c\in R$ با استفاده از روش دِلتا به روش زیر عمل می‌کنیم:

۱. از رابطهٔ $\Delta=b^2-4ac$ مقدار دلتا را به‌دست می‌آوریم.

۲. با توجه به مقدار به دست آمده برای دلتا داریم:

الف) اگر $\Delta>0$ باشد، آن‌گاه معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو جواب متمایز در مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

ب) اگر $\Delta=0$ باشد، آن‌گاه معادلهٔ درجهٔ دوم دارای یک جواب (مضاعف) در مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

پ) اگر $\Delta<0$ باشد، آن‌گاه معادلهٔ درجهٔ دوم در مجموعهٔ اعداد حقیقی جوابی ندارد.

۳. برای به دست آوردن جواب یا جواب‌های معادلهٔ درجه دوم در حالت‌هایی که دارای جواب است، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) اگر معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو جواب متمایز در مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، این جواب‌ها از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

ب) اگر معادلهٔ درجه دوم دارای یک جواب (مضاعف) در مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، این جواب از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

حال با توجه به مطالبی که در بالا ارائه شد، معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ و $a\in R-\{0\}$ و $b,c\in R$ را در نظر می‌گیریم و چون می‌دانیم که ضریب x^2، یعنی a، همواره عددی مخالف صفر است، پس طرفین معادلهٔ درجهٔ دوم مزبور را بر a تقسیم می‌کنیم. سپس با ساده کردن، کار را ادامه می‌دهیم تا صورت جدیدی از معادلهٔ درجه دوم پدیدار شود:

$$ax^2+bx+c=0 \quad \xRightarrow{\text{طرفین را بر a تقسیم می‌کنیم}} \quad \frac{a}{a}x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

اکنون با فرض $p=\frac{b}{a}$ و $q=\frac{c}{a}$ در رابطهٔ (۱) جایگذاری می‌کنیم و رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$x^2+px+q=0 \qquad (2)$$

با به دست آوردن رابطهٔ (۲) که موضوع اصلی یا به بیان بهتر معادلهٔ مورد بحث در این مقاله است، روند مطلوبمان را به شرح زیر پی می‌گیریم:

بدیهی است که در معادلهٔ $x^2+px+q=0$ همواره ضریب x^2 برابر با یک است و داریم: $p,q\in R$. اکنون برای این معادله با توجه به رابطهٔ $\Delta=b^2-4ac$ مقدار دِلتا را تعیین می‌کنیم:

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=p^2-4(1)(q) \Rightarrow \Delta=p^2-4q$$

روشن است، برای اینکه در مورد تعداد جواب‌های معادلهٔ $x^2+px+q=0$ بحث کنیم، می‌باید به تعیین مقدار دلتا متناظر با آن به شرح زیر بپردازیم:

الف) اگر $\Delta=p^2-4q>0$ باشد، آن‌گاه معادلهٔ $x^2+px+q=0$ دارای دو جواب متمایز حقیقی است.

ب) اگر $\Delta=p^2-4q=0$ باشد، آن‌گاه معادلهٔ $x^2+px+q=0$ دارای یک جواب (مضاعف) حقیقی است.

پ) اگر $\Delta=p^2-4q<0$ باشد، آن‌گاه معادلهٔ $x^2+px+q=0$ جواب حقیقی ندارد.

اکنون برای مشخص شدن جواب یا جواب‌های معادلهٔ $x^2+px+q=0$ در حالت‌هایی که دارای جواب است، به روش زیر عمل می‌کنیم:

الف) اگر معادلهٔ درجهٔ دوم مزبور دارای دو جواب متمایز حقیقی باشد، این جواب‌ها به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1,x_2=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow x_1,x_2=-\frac{p}{2}\pm\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2} \Rightarrow x_1,x_2=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2-4q}{4}}$$

$$\Rightarrow x_1,x_2=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{(\frac{p}{2})^2-q}$$

ب) اگر معادلهٔ درجهٔ دوم مذکور دارای یک جواب (مضاعف) حقیقی باشد، این جواب به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$x_1=x_2=-\frac{p}{2} \quad (4)$$

از مقایسهٔ رابطه‌های (۳) و (۴) می‌توان نتیجه گرفت که جواب‌های معادلهٔ $x^2+px+q=0$ و $p,q\in R$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آیند.

$$x_1,x_2=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{(\frac{p}{2})^2-q}$$

روشن است که اگر در رابطهٔ بالا مقدار زیر رادیکال، یعنی عبارت $(\frac{p}{2})^2-q$، کوچک‌تر از صفر باشد، آن‌گاه معادلهٔ مذکور در مجموعهٔ عددهای حقیقی دارای جواب نیست.

در پایان، از آنجا که در این مقاله به رابطهٔ جدیدی برای حل معادله‌های درجه دوم دست یافتیم، به‌گونه‌ای که این رابطه ریاضی‌آموزان را سریع‌تر و

آســان‌تر به تعیین تعداد جواب‌های معادلهٔ درجه دوم می‌رساند، بهتر است که نامی برای این روش ارائه دهیم. چون برای ارائــهٔ این رابطهٔ جدید از رابطــهٔ دِلتا بهره برده‌ایم و اســتفاده از آن نسبت به روش دلتا از سرعت بیشــتری برخوردار اســت، آن را روش **دور زدنِ دلتا** می‌نامیم.

مثال ۱. معادلهٔ $x^۲+۲x-۱۵=۰$ را با استفاده از روش دور زدن دِلتا حل کنید.

$$x^۲+۲x-۱۵=۰ \Rightarrow p=۲, q=-۱۵$$

$$x_۱, x_۲=-\frac{p}{۲}\pm\sqrt{(\frac{p}{۲})^۲-q}$$

$$\Rightarrow x_۱, x_۲=-\frac{۲}{۲}\pm\sqrt{(\frac{۲}{۲})^۲-(-۱۵)}$$

$$\Rightarrow x_۱, x_۲=-۱\pm\sqrt{۱۶}\Rightarrow\begin{cases}x_۱=-۱+۴\\x_۲=-۱-۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_۱=۳\\x_۲=-۵\end{cases}$$

مثال ۲. معادلهٔ $۶x^۲-۱۴x+۴=۰$ را با اســتفاده از روش دور زدن دِلتا حل کنید.

$$۶x^۲-۱۴x+۴=۰ \xRightarrow{\text{طرفین را بر شش تقسیم می‌کنیم}} x^۲-\frac{۷}{۳}x+\frac{۲}{۳}=۰$$

$$\Rightarrow p=-\frac{۷}{۳}, q=\frac{۲}{۳}$$

$$x_۱, x_۲=-\frac{p}{۲}\pm\sqrt{(\frac{p}{۲})^۲-q}$$

$$\Rightarrow x_۱, x_۲=\frac{۷}{۶}\pm\sqrt{(-\frac{۷}{۶})^۲-(\frac{۲}{۳})}$$

$$\Rightarrow x_۱, x_۲=\frac{۷}{۶}\pm\sqrt{\frac{۴۹}{۳۶}-\frac{۲}{۳}}\Rightarrow x_۱, x_۲=\frac{۷}{۶}\pm\sqrt{\frac{۲۵}{۳۶}}$$

$$\Rightarrow x_۱, x_۲=\frac{۷}{۶}\pm\frac{۵}{۶}\Rightarrow\begin{cases}x_۱=\frac{۷}{۶}+\frac{۵}{۶}\\x_۲=\frac{۷}{۶}-\frac{۵}{۶}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_۱=۲\\x_۲=\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

تمرین:

معادله‌های زیر را به روش دور زدن دِلتا حل کنید.

۱. $۲x^۲+\sqrt{۱۱}x-۱۱=۰$

۲. $۳۶x^۲-۶۰x-۲۴=۰$

۳. $-۵x^۲-۱۰x+۴۰=۰$

۴. $۲۴x^۲-۳۶x+۱۲=۰$